

DOI: 10.16285/j.rsm.2018.0563

基于球面波势函数基本解方法的弹性波 三维散射与动应力求解

刘中宪^{1,2}, 王治坤¹, 梁建文³, 王楚楚¹

(1. 天津城建大学 天津市土木建筑结构防护与加固重点实验室, 天津 300384; 2. 天津市地震工程研究所, 天津 300384;
3. 天津大学 土木工程系, 天津 300072)

摘 要: 针对弹性波三维散射和动应力集中问题, 提出一种基于球面波势函数的基本解方法 (SWP-MFS)。方法基于单层位势理论, 采用膨胀波和矢量剪切波球面波势函数构造散射场, 根据边界条件建立边界积分方程并配点求解。精度检验表明, 该方法具有良好的数值精度及稳定性。以无限空间中三维夹杂体及空洞对平面 P、SV 波的散射为例, 进行方法展示, 并揭示了三维夹杂体周围弹性波散射的一些重要规律。结果表明: 三维夹杂体随其内部介质刚度降低, 位移谱曲线震荡越加强烈。三维球形空洞在 P 波和 SV 波水平入射下应力集中规律不同, 前者在顶部和底部及附近更明显, 后者在纵截面两 45° 角线附近更明显。与以往的集中力源函数相比, 新的波场构造基本解更为简洁易用, 为三维弹性波动分析提供了一种新型无网格数值方法。

关 键 词: 基本解方法; 球面波势函数; 三维弹性波散射; 动应力集中

中图分类号: P 315.3

文献标识码: A

文章编号: 1000—7598 (2019) 07—2730—09

Method of fundamental solution based on complete spherical wave potential solutions to 3-D elastic wave scattering and dynamic stress

LIU Zhong-xian^{1,2}, WANG Zhi-kun¹, LIANG Jian-wen³, WANG Chu-chu¹

(1. Tianjin Key Laboratory of Civil Structure Protection and Reinforcing, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China; 2. Tianjin Institute of Earthquake Engineering, Tianjin 300384, China; 3. Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: A new method of fundamental solution based on complete spherical wave potential (SWP-MFS) is proposed to solve 3-D elastic-wave scattering and dynamic stress concentration. The method established the boundary integral equation according to the boundary condition. The solution was solved by placing the spherical wave sources of compressional wave and shear wave on a virtual boundary based on the single layer potential theory. Through comparing with other available results, the excellent numerical accuracy and stability of the SWP-MFS are validated. The method was demonstrated in an example of the 3-D scattering of P or SV waves around an inclusion and a cavity in elastic full-space. Several important conclusions about scattering of 3-D elastic waves around an inclusion were obtained. As the modulus ratio decreases (the inclusion becomes softer), the displacement amplitude spectrums oscillate more rapidly with large amplitude. For horizontal incident P waves, it seems that the dynamic stress concentration effect is more pronounced near the top and bottom of the spherical cavity, while it is more obvious near the two 45-degree angles of the longitudinal section for horizontal incident SV waves. Compared with employing the Green's functions of concentrated force, the fundamental solution of SWP-MFS is more concise and easy to use, and provides a new meshless boundary-type method for elastic waves analysis.

Keywords: method of fundamental solution (MFS); spherical wave potential (SWP); 3D elastic wave scattering; dynamic stress concentration

1 引 言

弹性波散射与动应力集中是岩土工程、地震工

程、地球物理勘探、无损检测等多个领域的研究热点之一, 因此近些年来已积累丰富的研究成果。整体上看, 弹性波散射问题可以通过理论分析、数值

收稿日期: 2018-04-08

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 51678390); 天津市自然科学基金重点项目 (No. 18JCZDJC39200); 天津市科技支撑计划项目 (No. 17YFZCSF01140)。This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51678309), the Key Projects of Tianjin Natural Science Foundation (18JCZDJC39200) and Tianjin Science and Technology Support Project (17YFZCSF01140).

第一作者简介: 刘中宪, 男, 1982 年生, 博士, 教授, 主要从事地震工程、工程振动等方面研究。E-mail: zhongxian1212@163.com

模拟和物理模型试验来进行研究。计算方法分为解析法和数值法。解析解方面, 波函数展开法已经被广泛用于弹性波散射问题求解^[1-4]。数值解方法主要包括有限元法^[5]、有限差分法^[6]、谱元法^[7]等域离散方法以及边界元法^[8-9]、离散波数法^[10]等边界离散型方法或混合法^[11]。

相比域离散型方法, 边界元法/积分方程法对于无限域问题求解具有其自身独特优势, 如计算维数无限域问题求解具有其自身独特优势; 计算维数自动满足无限远处边界条件。作为一种特殊的边界积分方程方法, 基本解方法(MFS)为了避免对格林函数奇异性的处理, 虚拟波源设置在散射体实际边界之外一定距离处。该方法最初源于 Kupradze 等^[12]工作, 利用边界积分方程得到边界配置点上虚拟波源的密度。从离散形式上看, 该方法也属于一种无网格方法, 因此数值模拟前后处理十分简便。另外, MFS 和 Trefftz 方法^[13]有很大的相似性, 非常适合无限域中波动问题求解, 因此, 在弹性波动领域已得到广泛应用^[14-15]。

在 MFS 方法实施中, 格林函数的合理构造选取是一个关键。本文针对无限域三维弹性波散射与动应力集中问题, 首次提出了一种基于球面波势函数的基本解方法(SWP-MFS)。方法基于单层位势理论, 采用膨胀波(P)和矢量剪切波(S_x, S_y, S_z)球面波势函数构造散射场。该方法求解思路比较直观, 且十分便于公式推导和数值实现。以无限域三维夹杂体及空洞对 P、SV 波散射为例, 给出具体求解步骤, 进而通过典型算例与已有精确解对比验证了方法精度, 并进行了数值稳定性分析。作为初步展示, 采用 SWP-MFS 求解了三维全空间中夹杂体和空洞对平面波的散射及动应力集中, 最后得出了一些重要结论。

2 计算模型

如图 1 所示, 无限域弹性全空间中埋置一任意形状夹杂体。假设无限域(D_0)和夹杂域(D_1)的介质均为弹性、均匀和各向同性。外部空间中介质剪切模量、密度和泊松比分别为 μ_1 、 ρ_1 、 ν_1 ; 夹杂体内相应参数为 μ_2 、 ρ_2 、 ν_2 ; 外部空间剪切波速和纵波波速分别为 c_s 、 c_p 。

3 计算方法

3.1 SWP-MFS 格林函数推导

采用 MFS 求解无限域三维波动问题, 需首先推导全空间中的格林函数。本文采用膨胀波和剪切波

来构造散射场, 参考经典 Lamb 问题的解决方法, 推导了全空间内膨胀波源与剪切波源作用时的格林函数。在弹性介质中, 对于任何形状的散射体周围会产生膨胀波(P)和剪切波(S_x, S_y, S_z)。值得注意的是, 矢量 S 波的 3 个分量不是完全独立的, 应满足散度为 0 的条件。4 种波示意图如图 2 所示。

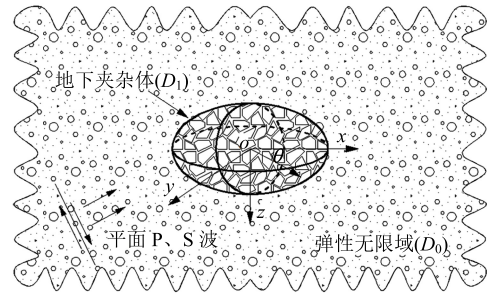


图1 无限域中三维夹杂体对弹性波散射模型示意图
Fig.1 Schematic graph of 3D elastic wave scattering by an inclusion in an infinite domain

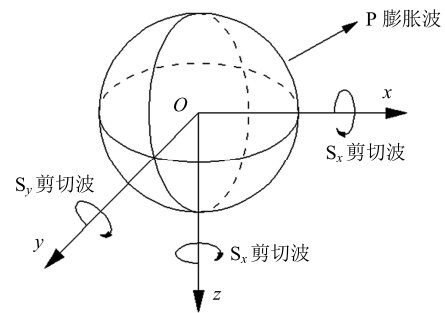


图2 散射波场构造所需4种球面波源
Fig.2 Four spherical waves for constructing the scattered wave

3.1.1 球面膨胀波源作用下的格林函数

球面膨胀波源的势函数:

$$\phi = e^{(-ihr)} / r \quad (1)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$; $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$, 为观察点与波源点之间的距离; x, y, z 为观测点; x_1, y_1, z_1 为波源点; h 为膨胀波源的波数。简谐振动时间因子 $\exp(i\omega t)$ 已略去, 下同。

根据位移势函数的波动方程可得

$$u_x = \partial\phi / \partial x, u_y = \partial\phi / \partial y, u_z = \partial\phi / \partial z \quad (2)$$

式中, u_x, u_y, u_z 分别为 3 个方向的位移; σ 为应力; ϕ 为膨胀波势函数。

球面膨胀波作用的位移格林函数:

$$\left. \begin{aligned} u_{x,1} &= -[xe^{(ihr)}(1-ihr)]/r^3 \\ u_{y,1} &= -[ye^{(ihr)}(1-ihr)]/r^3 \\ u_{z,1} &= -[ze^{(ihr)}(1-ihr)]/r^3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $u_{x,1}$ 、 $u_{y,1}$ 、 $u_{z,1}$ 分别为膨胀波作用下 3 个方向的位移。

根据应变位移关系(几何方程)及式(2)可得

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2}; e_{xx} = \frac{\partial \phi}{\partial x^2}; e_{yy} = \frac{\partial \phi}{\partial y^2}; e_{zz} = \frac{\partial \phi}{\partial z^2} \\ e_{xy} &= \frac{(\partial \phi)^2}{\partial x \partial y} + \frac{(\partial \phi)^2}{\partial y \partial x}; e_{xz} = \frac{(\partial \phi)^2}{\partial x \partial z} + \frac{(\partial \phi)^2}{\partial z \partial x}; \\ e_{yz} &= \frac{(\partial \phi)^2}{\partial y \partial z} + \frac{(\partial \phi)^2}{\partial z \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: e_{xx} 、 e_{yy} 、 e_{zz} 、 e_{xy} 、 e_{xz} 、 e_{yz} 为三维状态下的 6 种应变。

球面膨胀波作用的应力格林函数:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,1} &= -[e^{(ihr)}(-4\mu x^2 + 2\mu(y^2 + z^2) + h^2\lambda(x^4 + y^4 + z^4) + \\ &\quad 2h^2\mu x^4 - 3ih\lambda r^3 - 2ih\mu r^3 + 2h^2\lambda(x^2y^2 + x^2z^2 + \\ &\quad y^2z^2) + 2h^2\mu(x^2y^2 + x^2z^2) + 3ih\lambda r^3 + 6ih\mu x^2r)]/r^5 + \\ \sigma_{yy,1} &= -[e^{(ihr)}(-4\mu y^2 + 2\mu(x^2 + z^2) + h^2\lambda(x^4 + y^4 + z^4) + \\ &\quad 2h^2\mu y^4 - 3ih\lambda r^3 - 2ih\mu r^3 + 2h^2\lambda(x^2y^2 + x^2z^2 + \\ &\quad y^2z^2) + 2h^2\mu(x^2y^2 + y^2z^2) + 3ih\lambda r^3 + 6ih\mu y^2r)]/r^5 \\ \sigma_{zz,1} &= -[e^{(ihr)}(-4\mu z^2 + 2\mu(x^2 + y^2) + h^2\lambda(x^4 + y^4 + z^4) + \\ &\quad 2h^2\mu z^4 - 3ih\lambda r^3 - 2ih\mu r^3 + 2h^2\lambda(x^2y^2 + x^2z^2 + \\ &\quad y^2z^2) + 2h^2\mu(x^2z^2 + y^2z^2) + 3ih\lambda r^3 + 6ih\mu z^2r)]/r^5 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy,1} &= -(2\mu e^{(ihr)}xy(h^2r^2 - 3 + 3ihr))/r^5 \\ \tau_{xz,1} &= -(2\mu e^{(ihr)}xz(h^2r^2 - 3 + 3ihr))/r^5 \\ \tau_{yz,1} &= -(2\mu e^{(ihr)}yz(h^2r^2 - 3 + 3ihr))/r^5 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $\sigma_{xx,1}$ 、 $\sigma_{yy,1}$ 、 $\sigma_{zz,1}$ 分别为膨胀波作用下的 3 个方向的法向应力分量; $\tau_{xy,1}$ 、 $\tau_{xz,1}$ 、 $\tau_{yz,1}$ 分别为膨胀波作用下的 3 个方向的切向应力分量; μ 、 λ 分别为第一、第二拉梅常数。

3.1.2 剪切波源作用下的格林函数

剪切波势函数为一矢量, 对于球面剪切 S 波, 总运动可分解为 3 个分别绕 X、Y、Z 轴旋转的分量合成, 即 S_x 、 S_y 、 S_z 。

剪切波的势函数:

$$\psi_i = e^{(-ikr)} / r \quad (7)$$

式中: k 为剪切波源的波数, $t=1, 2, 3$ 分别为 3 个剪切波分量。根据 Helmholtz 分解原理和弹性本构关系, 容易得到剪切波作用的位移和应力函数如下:

S_x 剪切波绕 X 轴旋转分量:

$$\left. \begin{aligned} u_{x,2} &= 0 \\ u_{y,2} &= [ze^{(ikr)}(ikr - 1)]/r^3 \\ u_{z,2} &= -[ye^{(ikr)}(ikr - 1)]/r^3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,2} &= 0 \\ \sigma_{yy,2} &= -[2\mu yze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \sigma_{zz,2} &= [2\mu yze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{xy,2} &= -[\mu xze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{xz,2} &= [\mu xye^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{yz,2} &= [\mu e^{(ikr)}(y^2 - z^2)(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: $u_{x,2}$ 、 $u_{y,2}$ 、 $u_{z,2}$ 分别为第 1 种剪切波作用下 3 个方向的位移; $\sigma_{xx,2}$ 、 $\sigma_{yy,2}$ 、 $\sigma_{zz,2}$ 、 $\tau_{xy,2}$ 、 $\tau_{xz,2}$ 、 $\tau_{yz,2}$ 为第 1 种剪切波作用下 6 种应力分量。

S_y 剪切波绕 Y 轴方向旋转分量:

$$\left. \begin{aligned} u_{x,3} &= -[ze^{(ikr)}(ikr - 1)]/r^3 \\ u_{y,3} &= 0 \\ u_{z,3} &= [xe^{(ikr)}(ikr - 1)]/r^3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,3} &= [2\mu xze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \sigma_{yy,3} &= 0 \\ \sigma_{zz,3} &= -[2\mu xze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{xy,3} &= [\mu yze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{xz,3} &= -[\mu e^{(ikr)}(x^2 - z^2)(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{yz,3} &= -[\mu xye^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $u_{x,3}$ 、 $u_{y,3}$ 、 $u_{z,3}$ 分别为第 2 种剪切波作用下 3 个方向的位移; $\sigma_{xx,3}$ 、 $\sigma_{yy,3}$ 、 $\sigma_{zz,3}$ 、 $\tau_{xy,3}$ 、 $\tau_{xz,3}$ 、 $\tau_{yz,3}$ 为第 2 种剪切波作用下 6 种应力分量。

S_z 剪切波绕 Z 轴旋转分量:

$$\left. \begin{aligned} u_{x,4} &= (ye^{(ikr)}(ikr - 1))/r^3 \\ u_{y,4} &= -(xe^{(ikr)}(ikr - 1))/r^3 \\ u_{z,4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx,4} &= -[2\mu xye^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \sigma_{yy,4} &= [2\mu xye^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \sigma_{zz,4} &= 0 \\ \tau_{xy,4} &= [\mu e^{(ikr)}(x^2 - y^2)(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{xz,4} &= -[\mu yze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \\ \tau_{yz,4} &= [\mu xze^{(ikr)}(k^2r^2 + 3ikr - 3)]/r^5 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: $u_{x,4}$ 、 $u_{y,4}$ 、 $u_{z,4}$ 分别为第 3 种剪切波作用下 3 个方向的位移; $\sigma_{xx,4}$ 、 $\sigma_{yy,4}$ 、 $\sigma_{zz,4}$ 、 $\tau_{xy,4}$ 、 $\tau_{xz,4}$ 、 $\tau_{yz,4}$ 为第 3 种剪切波作用下 6 种应力分量。

从上述格林函数形式容易看出, 以往采用的集中力源函数在形式要复杂于球面波势函数, 因为集中力作用下会激起两类波, 因此, 表达式包含两类波的贡献。而球面波势函数纵波和剪切波势则是独立的。另外, 在推导过程中, 按照 Lamb 求解方法^[6], 集中力函数推导需要结合径向 Hankel 变换和周向傅里叶变换, 再利用力作用水平面上位移应力连续

条件，最终通过积分反变换获得封闭解。而本文基于球面波势函数的基本解推导，则不需要这种积分变换。因此，可十分方便地拓展于其他情况如各向异性介质、饱和孔隙介质等波动求解。

3.2 波场分析

根据惠更斯原理，地震波入射在不均质体上会发生散射，而在散射体表面上的每一点都相当于一个次生子波源，因此可通过在边界上施加虚拟动荷载模拟次生波源。在三维状态下，可采用集中荷载、集中球面波源或者三维均布面荷载来构造散射波场。由于集中球面波源在正作用点处具有位移和应力奇异性，为避免奇异性在数学处理上的困难，可考虑在边界附近设置一虚拟波源面，在其上设置虚拟波源。这样处理在数学求解上较为简单，但需要注意虚拟源面最优位置随频率变化，因此该方法具有一定的经验性。

基于球面波势函数的基本解方法原理，首先将总波场分解为自由场和散射场。自由场为不含散射体时，弹性波入射下的波场解。当存在夹杂体时，全空间中将会发生波的散射。基于单层位势理论，全空间中散射场可由两种虚拟球面波源产生，即膨胀波源 $\phi = e^{-ikr} / r$ 和剪切波源 $\psi_i = e^{-ikr} / r$ 。则散射场中的位移和应力可表示为

$$u_i^s(x) = \int_{S_1} [b_1(x_1)G_{i,1}^{(s_1)}(x, x_1) + c_1(x_1)G_{i,2}^{(s_1)}(x, x_1) + d_1(x_1)G_{i,3}^{(s_1)}(x, x_1) + e_1(x_1)G_{i,4}^{(s_1)}(x, x_1)] dS_1 \quad (14)$$

$$\sigma_i^s(x) = \int_{S_1} [b_1(x_1)T_{i,1}^{(s_1)}(x, x_1) + c_1(x_1)T_{i,2}^{(s_1)}(x, x_1) + d_1(x_1)T_{i,3}^{(s_1)}(x, x_1) + e_1(x_1)T_{i,4}^{(s_1)}(x, x_1)] dS_1 \quad (15)$$

式中： $x = S$ ； $x_1 = S_1$ ； $b_1(x_1)$ 、 $c_1(x_1)$ 、 $d_1(x_1)$ 、 $e_1(x_1)$ 分别为在虚拟波源面 S_1 对应波源 P 、 S_x 、 S_y 、 S_z 的散射密度； $G_{i,j}^{(s)} = u_{i,j}$ ； $T_{i,j}^{(s)} = \sigma_{ix,j}n_x + \tau_{iy,j}n_y + \tau_{iz,j}n_z$ ； n_x 、 n_y 、 n_z 分别为 X 、 Y 、 Z 方向的单位法向量。 S 代表边界 S_1 、 S_2 ，其对应不同域的边界点； $G_{i,j}^{(s_1)}(x, x_1)$ 、 $T_{i,j}^{(s_1)}(x, x_1)$ 表示全空间域的位移和应力格林函数，下标 $i=1, 2, 3$ 表示 X 、 Y 、 Z 方向； $j=1, 2, 3, 4$ 表示膨胀波 P 和 3 个剪切波 S_x 、 S_y 、 S_z 。

夹杂体内散射波则由虚拟波源面 S_2 上所有膨胀波源和剪切波源的作用叠加而得

$$u_i^s(x) = \int_{S_2} [b_2(x_2)G_{i,1}^{(s_2)}(x, x_2) + c_2(x_2)G_{i,2}^{(s_2)}(x, x_2) + d_2(x_2)G_{i,3}^{(s_2)}(x, x_2) + e_2(x_2)G_{i,4}^{(s_2)}(x, x_2)] dS_2 \quad (16)$$

$$\sigma_i^s(x) = \int_{S_2} [b_2(x_2)T_{i,1}^{(s_2)}(x, x_2) + c_2(x_2)T_{i,2}^{(s_2)}(x, x_2) + d_2(x_2)T_{i,3}^{(s_2)}(x, x_2) + e_2(x_2)T_{i,4}^{(s_2)}(x, x_2)] dS_2 \quad (17)$$

式中： $x = S$ ； $x_2 = S_2$ ； $b_2(x_2)$ 、 $c_2(x_2)$ 、 $d_2(x_2)$ 、 $e_2(x_2)$ 分别为在虚拟波源面 S_2 对应波源 P 、 S_x 、 S_y 、 S_z 的散射密度； $G_{i,j}^{(s_2)}(x, x_2)$ 、 $T_{i,j}^{(s_2)}(x, x_2)$ 表示夹杂域的位移和应力格林函数。

综上，全空间中总的位移和应力场由自由场和散射场叠加而得，夹杂体内部反应则全部由夹杂体内的散射场产生。另外，为了消除点源的奇异性，虚拟表面 S_2 应放置在夹杂体之外。

3.3 边界条件

根据边界条件，考虑夹杂体和全空间交界面上的位移和应力连续性条件。通过上述求得各部分波场建立方程求解波源密度，边界条件可表达为

$$\left. \begin{aligned} u_x^{s_1} + u_x^f &= u_x^{s_2}, \quad u_y^{s_1} + u_y^f = u_y^{s_2}, \quad u_z^{s_1} + u_z^f = u_z^{s_2} \\ \sigma_x^{s_1} + \sigma_x^f &= \sigma_x^{s_2}, \quad \sigma_y^{s_1} + \sigma_y^f = \sigma_y^{s_2}, \quad \sigma_z^{s_1} + \sigma_z^f = \sigma_z^{s_2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中：上标 s_1 、 s_2 、 f 分别为全空间散射场，夹杂体散射场和全空间自由场。

将式 (14) ~ (17) 代入式 (18) 中，并移向可得

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} [b_1(x_1)G_{i,1}(x, x_1) + c_1(x_1)G_{i,2}(x, x_1) + d_1(x_1)G_{i,3}(x, x_1) + e_1(x_1)G_{i,4}(x, x_1)] dS_1 - \\ & \int_{S_2} [b_2(x_2)G_{i,1}(x, x_2) + c_2(x_2)G_{i,2}(x, x_2) + d_2(x_2)G_{i,3}(x, x_2) + e_2(x_2)G_{i,4}(x, x_2)] dS_2 = -u_i^{(f)}(x) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} [b_1(x_1)T_{i,1}(x, x_1) + c_1(x_1)T_{i,2}(x, x_1) + d_1(x_1)T_{i,3}(x, x_1) + e_1(x_1)T_{i,4}(x, x_1)] dS_1 - \\ & \int_{S_2} [b_2(x_2)T_{i,1}(x, x_2) + c_2(x_2)T_{i,2}(x, x_2) + d_2(x_2)T_{i,3}(x, x_2) + e_2(x_2)T_{i,4}(x, x_2)] dS_2 = -\sigma_i^{(f)}(x) \end{aligned} \quad (20)$$

值得注意的是，此处对 3 个剪切波势函数需附加一个限制条件，即剪切波矢量函数的散度为 0。

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= [xe^{(ikr)}(ikr-1)]/r^3 \\ \psi_y &= [ye^{(ikr)}(ikr-1)]/r^3 \\ \psi_z &= [ze^{(ikr)}(ikr-1)]/r^3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\int_{S_1} [d_1(x_1)\psi_x(x, x_1) + e_1(x_1)\psi_y(x, x_1) + f_1(x_1)\psi_z(x, x_1)] dS_1 = 0 \quad (23)$$

$$\int_S [d_2(x_2)\psi_x(x, x_2) + e_2(x_2)\psi_y(x, x_2) + f_2(x_2)\psi_z(x, x_2)] dS_2 = 0 \quad (24)$$

为了便于问题数值求解, 现将交界表面 S , 虚拟波源面 S_1 和虚拟波源面 S_2 均匀离散, 单元个数分别为 N 、 N_1 、 N_2 , 则位移和应力表达式可由积分形式转换为

$$\sum_{l=1}^{N_1} [b_1(x_l)G_{i,1}(x_n, x_l) + c_1(x_l)G_{i,2}(x_n, x_l) + d_1(x_l)G_{i,3}(x_n, x_l) + e_1(x_l)G_{i,4}(x_n, x_l)] - \sum_{m=1}^{N_2} [b_2(x_m)G_{i,1}(x_n, x_m) + c_2(x_m)G_{i,2}(x_n, x_m) + d_2(x_m)G_{i,3}(x_n, x_m) + e_2(x_m)G_{i,4}(x_n, x_m)] = -u_i^{(f)}(x) \quad (25)$$

$$\sum_{l=1}^{N_1} [b_1(x_l)T_{i,1}(x_n, x_l) + c_1(x_l)T_{i,2}(x_n, x_l) + d_1(x_l)T_{i,3}(x_n, x_l) + e_1(x_l)T_{i,4}(x_n, x_l)] - \sum_{m=1}^{N_2} [b_2(x_m)T_{i,1}(x_n, x_m) + c_2(x_m)T_{i,2}(x_n, x_m) + d_2(x_m)T_{i,3}(x_n, x_m) + e_2(x_m)T_{i,4}(x_n, x_m)] = -\sigma_i^{(f)}(x) \quad (26)$$

$$\sum_{l=1}^{N_1} [d_1(x_l)\psi_x(x_n, x_l) + e_1(x_l)\psi_y(x_n, x_l) + f_1(x_l)\psi_z(x_n, x_l)] = 0 \quad (27)$$

$$\sum_{l=1}^{N_2} [d_2(x_m)\psi_x(x_n, x_m) + e_2(x_m)\psi_y(x_n, x_m) + f_m(x_l)\psi_z(x_n, x_m)] = 0 \quad (28)$$

当夹杂体内部充满空气, 即三维空洞状态。仅仅在空间域中存在散射场, 边界条件可以简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{S_1} + \sigma_x^f &= 0, \sigma_y^{S_1} + \sigma_y^f = 0, \sigma_z^{S_1} + \sigma_z^f = 0 \\ \psi_x^{S_1} + \psi_x^f &= 0, \psi_y^{S_1} + \psi_y^f = 0, \psi_z^{S_1} + \psi_z^f = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

同理, 式 (25) ~ (28) 可退化为

$$\sum_{l=1}^{N_1} [b_1(x_l)T_{i,1}(x_n, x_l) + c_1(x_l)T_{i,2}(x_n, x_l) + d_1(x_l)T_{i,3}(x_n, x_l) + e_1(x_l)T_{i,4}(x_n, x_l)] = -\sigma_i^{(f)}(x) \quad (30)$$

$$\sum_{l=1}^{N_1} [c_1(x_l)\psi_x(x_n, x_l) + d_1(x_l)\psi_y(x_n, x_l) + e_1(x_l)\psi_z(x_n, x_l)] = 0 \quad (31)$$

式中: $x \in S$; $x_l \in S_1$; $x_m \in S_2$; $n=1, 2, \dots, N$; $l=1, 2, \dots, N_1$; $m=1, 2, \dots, N_2$; $b_1(x_l)$ 、 $c_1(x_l)$ 、 $d_1(x_l)$ 、 $e_1(x_l)$ 和 $b_2(x_m)$ 、 $c_2(x_m)$ 、 $d_2(x_m)$ 、 $e_2(x_m)$ 分别表示在虚拟波源面 S_1 、 S_2 上波源 P 、 S_x 、 S_y 、 S_z 的散射密度。

根据界面 S 处的连续性边界条件, 可以得到夹杂体及空洞的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} & G_{12}^{(1)} & G_{13}^{(1)} & G_{14}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} & G_{22}^{(1)} & G_{23}^{(1)} & G_{24}^{(1)} \\ G_{31}^{(1)} & G_{32}^{(1)} & G_{33}^{(1)} & G_{34}^{(1)} \\ T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} & T_{23}^{(1)} & T_{24}^{(1)} \\ T_{31}^{(1)} & T_{32}^{(1)} & T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)} \\ 0 & \psi_x^{(1)} & \psi_y^{(1)} & \psi_z^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1^{(f)} \\ G_2^{(f)} \\ G_3^{(f)} \\ T_1^{(f)} \\ T_2^{(f)} \\ T_3^{(f)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} G_{11}^{(2)} & G_{12}^{(2)} & G_{13}^{(2)} & G_{14}^{(2)} \\ G_{21}^{(2)} & G_{22}^{(2)} & G_{23}^{(2)} & G_{24}^{(2)} \\ G_{31}^{(2)} & G_{32}^{(2)} & G_{33}^{(2)} & G_{34}^{(2)} \\ T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} & T_{13}^{(2)} & T_{14}^{(2)} \\ T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} & T_{23}^{(2)} & T_{24}^{(2)} \\ T_{31}^{(2)} & T_{32}^{(2)} & T_{33}^{(2)} & T_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_x^{(2)} & \psi_y^{(2)} & \psi_z^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} & T_{23}^{(1)} & T_{24}^{(1)} \\ T_{31}^{(1)} & T_{32}^{(1)} & T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)} \\ 0 & \psi_x^{(1)} & \psi_y^{(1)} & \psi_z^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^{(f)} \\ T_2^{(f)} \\ T_3^{(f)} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

式中: $G_{ij}^{(1)}$ 和 $T_{ij}^{(1)}$ 表示在虚拟波源面 S_1 上第 j 类波作用下, 在边界 S 上的边界点沿 i 方向的位移和应力格林函数; $G_{ij}^{(2)}$ 和 $T_{ij}^{(2)}$ 表示在虚拟波源面 S_2 上第 j 类波作用下, 在边界 S 上的边界点沿 i 方向的位移和应力格林函数。 b_1 、 c_1 、 d_1 、 e_1 和 b_2 、 c_2 、 d_2 、 e_2 分别表示在虚拟波源面 S_1 、 S_2 上波源 P 、 S_x 、 S_y 、 S_z 的散射密度; $G_i^{(f)}$ 和 $T_i^{(f)}$ 表示自由场的位移和应力。式 (32)、(33) 可以采用最小二乘法或逆矩阵法求解, 一旦确定未知波源密度, 则可通过散射场与自由场的叠加得到总波场。

4 精度验证

为了验证所提出的基于球面波势函数的基本解方法的精度, 本文通过与其他已有的数值方法进行比较, 来验证本方法的准确性和稳定性。首先定义无量纲频率如下:

$$\eta = 2a / \lambda_k = \omega a / (\pi c_s) \quad (34)$$

式中: λ_k 为相应剪切波的波长; ω 为角频率; a 为模型尺寸。

4.1 球形空洞对平面波的散射结果对比

以全空间球形洞室对弹性波散射为例。由于波的散射引起的动应力集中具有广泛的应用价值, 图 3 给出了 P 波入射下洞室环向应力的结果与精确解析解^[17]对比分析。取无量纲波数 $ka=4.0$, 泊松比 $\nu=1/3$, 其余参数均与文献[17]相同。可以看出, 本方法结果与文献数据吻合良好。

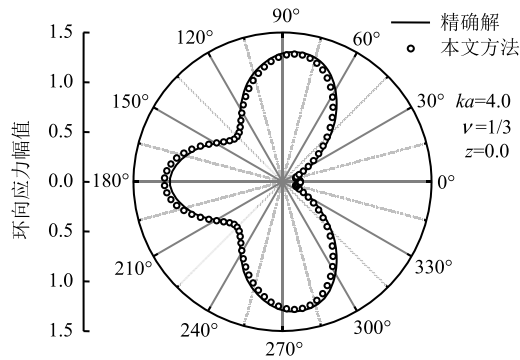


图 3 SWP-MFS 求解环向应力与 Moon 和 Pao 精确解^[17]对比

Fig.3 Amplitudes of hoop stress solution of SWP-MFS compared with those of Moon and Pao^[17]

4.2 球形夹杂对平面波的散射结果对比

以全空间圆形夹杂体对弹性波散射为例，半径为 a 。图 4 为 P 波或 SV 波入射下夹杂域内沿着 X 轴($|u_x(x, y, z)|$)和 Z 轴($|u_z(x, y, z)|$)的标准化位移幅值结果与精确解析解^[18]对比。计算参数与文献[18]相同，取值如下：全空间域，介质弹性模量 $E_1=70$ GPa，密度 $\rho_1=2\ 700$ kg/m³，泊松比 $\nu_1=0.3$ 。夹杂域，介质弹性模量 $E_2=200$ GPa，密度 $\rho_2=7\ 800$ kg/m³，泊松比 $\nu_2=0.3$ 。定义无量纲波数 $ha(ka)=1.0, 5.0$ 。可以明显看出，两者吻合结果良好，进一步验证了本方法的正确性。

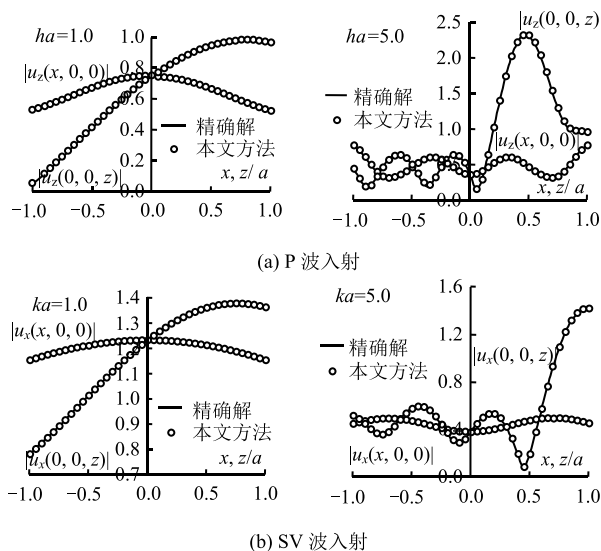


图 4 SWP-MFS 求解位移幅值与 Kanaun 和 Levin 所得精确解^[18]对比

Fig.4 Displacement amplitudes solution of SWP-MFS compared with those of Kanaun and Levin^[18]

4.3 数值稳定性检验

为了进一步验证本文方法的数值稳定性和收敛性，表 1~4 分别给出了 P 波和 SV 波入射下，考虑离散点数的变化夹杂体表面位移幅值的收敛情况。定义无量纲频率 $\eta=1, 2$ ，泊松比 $\nu=0.25$ ，夹杂体

外内剪切模量比 $\mu_1/\mu_2=4$ 。以离散点数 $N=1\ 800$ 所得结果为基准，计算 N 分别为 1 200、800、600 情况下的标准化位移幅值。一般情况下，虚拟波源点数取为交界面离散点数的一半左右，即可保证很高的计算精度。

分析结果表明：随着边界离散点的增多，各点位移幅值误差基本稳定在 10^{-3} 水平。由此表明本方法具有良好的稳定性。

表 1 P 波入射下 MFS 方法位移幅值稳定性检验 ($\eta=1$)
Table 1 Convergence test of MFS on the displacement amplitude under P waves ($\eta=1$)

θ /($^{\circ}$)	N=1 800		N=1 200		N=800		N=600	
	位移值	位移值	相对 误差	位移值	相对 误差	位移值	相对 误差	
0.0	1.564	1.564	0	1.563	1×10^{-3}	1.566	2×10^{-3}	
22.5	1.129	1.129	0	1.128	1×10^{-3}	1.132	3×10^{-3}	
45.0	1.134	1.134	0	1.134	0	1.135	1×10^{-3}	
67.5	1.035	1.035	0	1.035	0	1.035	0	
90.0	0.460	0.460	0	0.461	1×10^{-3}	0.461	1×10^{-3}	
112.5	0.956	0.956	0	0.956	0	0.955	0	
135.0	1.472	1.472	0	1.471	1×10^{-3}	1.471	1×10^{-3}	
157.5	1.746	1.746	0	1.746	0	1.746	0	
180.0	1.839	1.839	0	1.838	1×10^{-3}	1.840	1×10^{-3}	

表 2 SV 波入射下 MFS 方法位移幅值稳定性检验 ($\eta=1$)
Table 2 Convergence test of MFS on the displacement amplitude under SV waves ($\eta=1$)

$\theta/(^{\circ})$	$N=1\ 800$			$N=800$			$N=600$		
	位移值	位移值	相对误差	位移值	相对误差	位移值	相对误差		
0.0	3.171	3.171	0	3.171	0	3.172	1×10^{-3}		
22.5	2.138	2.138	0	2.138	0	2.137	1×10^{-3}		
45.0	0.254	0.253	0	0.254	0	0.254	0		
67.5	1.314	1.314	0	1.314	0	1.316	2×10^{-3}		
90.0	0.803	0.803	0	0.800	3×10^{-3}	0.804	1×10^{-3}		
112.5	0.977	0.977	0	0.980	3×10^{-3}	0.979	2×10^{-3}		
135.0	1.229	1.229	0	1.229	0	1.228	1×10^{-3}		
157.5	1.949	1.949	0	1.949	0	1.949	0		
180.0	2.260	2.260	0	2.262	2×10^{-3}	2.260	0		

表 3 P 波入射下 MFS 方法位移幅值稳定性检验 ($\eta=2$)
Table 3 Convergence test of MFS on the displacement amplitude under P waves ($\eta=2$)

$\theta/(^{\circ})$	$N=1\ 800$		$N=1\ 200$		$N=800$		$N=600$	
	位移值	位移值	相对 误差	位移值	相对 误差	位移值	相对 误差	
0.0	2.264	2.264	0	2.270	6×10^{-3}	2.276	12×10^{-3}	
22.5	1.030	1.030	0	1.038	8×10^{-3}	1.039	9×10^{-3}	
45.0	0.274	0.274	0	0.273	1×10^{-3}	0.271	3×10^{-3}	
67.5	1.056	1.057	1×10^{-3}	1.048	8×10^{-3}	1.047	9×10^{-3}	
90.0	0.745	0.745	0	0.754	9×10^{-3}	0.756	11×10^{-3}	
112.5	1.503	1.504	1×10^{-3}	1.505	2×10^{-3}	1.503	0	
135.0	0.975	0.976	1×10^{-3}	0.969	6×10^{-3}	0.967	8×10^{-3}	
157.5	1.429	1.429	0	1.417	12×10^{-3}	1.412	17×10^{-3}	
180.0	1.754	1.754	0	1.747	7×10^{-3}	1.746	8×10^{-3}	

表4 SV波入射下MFS方法位移幅值稳定性检验 ($\eta=2$)
Table 4 Convergence test of MFS on the displacement amplitude under SV waves ($\eta=2$)

$\theta/(^\circ)$	$N=1\ 800$			$N=1\ 200$			$N=800$			$N=600$		
	位移值	位移值	相对误差	位移值	位移值	相对误差	位移值	位移值	相对误差	位移值	位移值	相对误差
0.0	3.916	3.914	2×10^{-3}	3.916	0		3.917	1×10^{-3}				
22.5	1.647	1.648	1×10^{-3}	1.643	4×10^{-3}		1.643	4×10^{-3}				
45.0	0.849	0.850	1×10^{-3}	0.855	6×10^{-3}		0.859	10×10^{-3}				
67.5	0.716	0.717	1×10^{-3}	0.715	1×10^{-3}		0.722	6×10^{-3}				
90.0	0.762	0.761	1×10^{-3}	0.756	6×10^{-3}		0.748	14×10^{-3}				
112.5	0.841	0.840	1×10^{-3}	0.833	8×10^{-3}		0.830	11×10^{-3}				
135.0	0.578	0.577	1×10^{-3}	0.587	9×10^{-3}		0.592	14×10^{-3}				
157.5	1.927	1.927	0	1.928	1×10^{-3}		1.922	5×10^{-3}				
180.0	0.942	0.946	4×10^{-3}	0.954	12×10^{-3}		0.954	12×10^{-3}				

5 数值算例分析

为便于揭示基本规律,下面以弹性全空间中三维夹杂体(软夹杂)和三维空洞(夹杂体内部为空气)为例,采用MFS方法进行参数分析。在以下的分析中,假设平面P波或SV波沿着负X轴入射(见图5),分别对应计算XOY面及XOZ面的位移及环向应力,本文的数值结果均经过标准化处理。

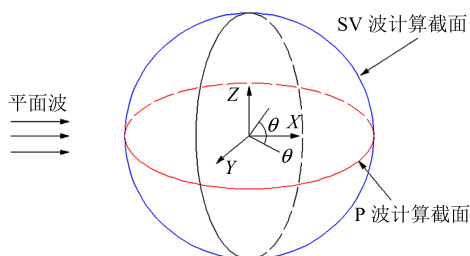


图5 P波或SV波入射下三维散射体计算截面示意图
Fig.5 Calculation model for 3-D scattering of incident P waves or SV waves

图6、7分别给出了P波或SV波入射条件下,圆球形空洞和刚度不同的圆球形夹杂体(软夹杂)在不同观测点下的表面位移幅值谱。具体计算参数为:加塞外内剪切模量比 μ_1/μ_2 分别为4、16;密度比 $\rho_1/\rho_2=1$;剪切波速比 β_1/β_2 分别为2、4;泊松比 $\nu=0.25$ 。观测点取 θ 分别为 0° 、 45° 、 90° 和 180° 。定义无量纲频率 η 范围为 $0.0 \sim 2.0$ 。

结果表明:软夹杂位移谱曲线表现出明显的共振散射效应,且随着夹杂体内介质刚度降低,位移幅值谱随频率振荡越发强烈。这是由于夹杂介质越软,其临阶体系自振频率间隔越小。空洞情况下的位移谱曲线则比较平滑,软夹杂情况的频谱曲线在空洞谱曲线上上下下震荡。在空间分布上,总体上看,

45° 和 90° 点位处位移幅值较小,迎波面处($\theta=180^\circ$)反应更加强烈。相比P波,SV波入射下频谱曲线振荡更加剧烈且夹杂对波的放大效应更明显,峰值可达自由场位移的5.8倍。另需注意, $\mu_1/\mu_2=4$,即夹杂外内2倍波速比情况,背波面($\theta=0^\circ$)振幅在 $\eta=2$ 附近有较为明显的放大,P、SV波入射下位移峰值分别达到3.4和5.6。

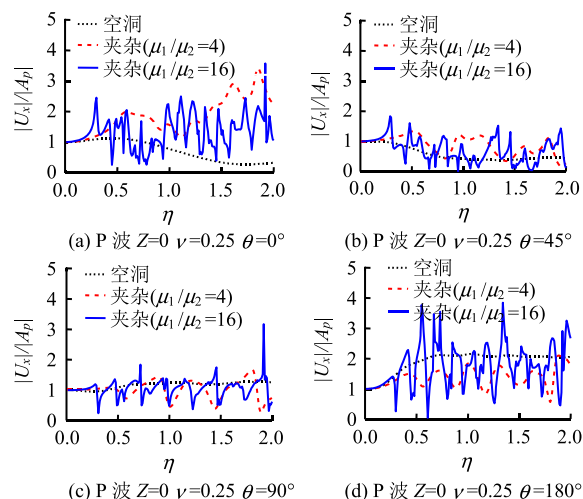


图6 圆球形空洞和不同刚度夹杂体对P波散射的表面位移幅值谱

Fig.6 Displacement amplitude spectrum for the inclusions with different stiffnesses and a spherical cavity under P waves

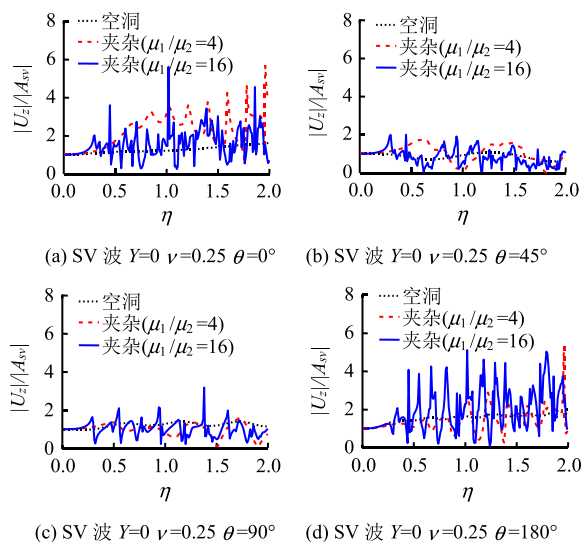


图7 圆球形空洞和不同刚度夹杂体对SV波散射的表面位移幅值谱

Fig.7 Displacement amplitude spectrum for the inclusions with different stiffnesses and a spherical cavity under SV waves

图8、9给出了在P波或SV波入射下,不同入射频率下椭球体空洞表面环向应力幅值。定义X、Y、Z方向上椭球体半轴长为 l_x 、 l_y 、 l_z 。P或SV波入

射下, 计算 $l_x=0.75l_y=0.75l_z$ (扁球体), $l_x=l_y=l_z$ (圆球体), $l_x=1.25l_y=1.25l_z$ (长球体)。介质泊松比 $\nu=0.25$, 无量纲入射频率取 η 分别为 0.25、0.50、1.00 和 2.00。

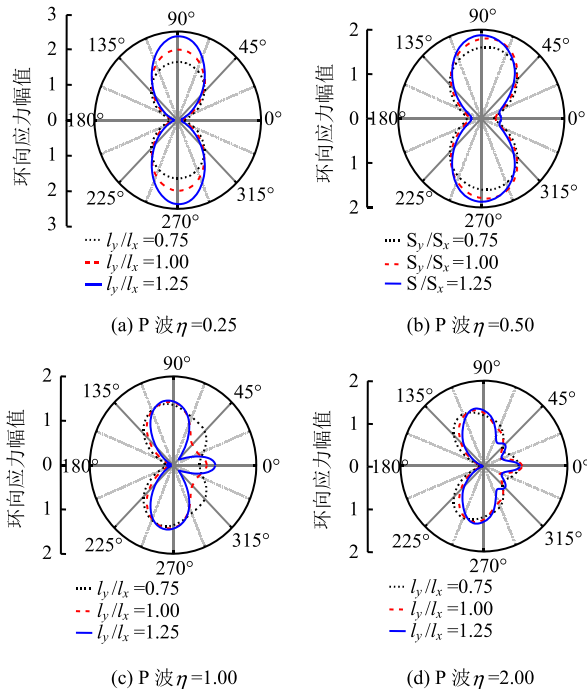


图8 不同入射频率下椭球体空洞对P波散射环向应力幅值图
Fig.8 Amplitudes of hoop stress around an elliptical cavity under P waves with different frequencies

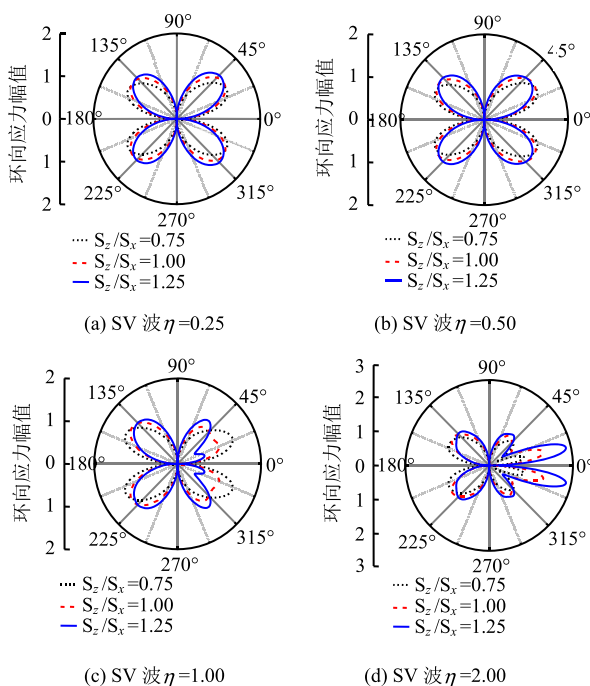


图9 不同入射频率下椭球体空洞对SV波散射环向应力幅值图

Fig.9 Amplitudes of hoop stress around an elliptical cavity under SV waves with different frequencies

结果表明: 随着入射波频率增加, 表面动应力集中空间反应特征趋于复杂; 背波面点 ($\theta=0^\circ$) 及附近随频率的增加变化更明显。空洞空间分布上, P 波水平入射下, 空洞顶部和底部及附近应力集中最为明显。值得注意的是, 随着椭球体由扁变长, 空洞顶部和底部及附近应力幅值逐渐增加; 迎波面点 ($\theta=180^\circ$) 附近应力较小且变化量不大; SV 波水平入射下, 纵截面两 45° 角线及附近应力集中比较明显。空洞顶部和底部附近应力幅值随着椭球体由扁变长逐渐增加。

6 结 论

针对无限域三维弹性波散射问题, 发展了一种基于球面波势函数的基本解方法 (SWP-MFS)。该方法采用球面膨胀波源和剪切波源势函数的格林函数, 同时考虑剪切波势函数散度为 0 的附加限制条件, 基于单层位势理论构造散射波场, 进而建立边界积分方程离散求解。通过同经典结果对比和稳定性分析验证了方法的计算精度及收敛性。最后, 以无限域中三维夹杂体及空洞对 P 波、SV 波散射为例, 研究了夹杂体及空洞周围弹性波散射若干规律。

(1) 结果表明, 三维软夹杂位移谱曲线表现出明显的共振散射效应, 且随着夹杂体内介质刚度降低, 位移幅值谱随频率振荡越发强烈。P 波水平入射下, 球形空洞顶部和底部及附近应力集中最为明显; SV 波水平入射下, 纵截面两 45° 角线附近应力集中比较明显。

(2) 本文方法为三维弹性波散射及动应力集中问题研究提供了新思路, 为实际地层中存在的岩石夹杂层和裂隙研究提供理论基础。但本文仅给出了全空间中波动问题求解过程, 结合相应的球面波势函数, 本文方法还可进一步扩展到半无限空间及饱和岩土介质三维波动问题求解。

参 考 文 献

- [1] 梁建文, 魏新磊, Vincent W LEE. 圆弧形沉积谷地对平面 P 波的三维散射解析解[J]. 岩土力学, 2010, 31(2): 461—470.
LIANG Jian-wen, WEI Xin-lei, VINCENT W LEE. 3-D scattering of plane P waves by a circular-arc alluvial valley[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(2): 461—470.
- [2] ZHANG N, Gao Y F, PAK R Y. Soil and topographic effects on ground motion of a surficially inhomogeneous semi-cylindrical canyon under oblique incident SH

- waves[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2017, 95: 17—28.
- [3] LIU Q J, ZHAO M J, WANG L H. Scattering of plane P, SV or Rayleigh waves by a shallow lined tunnel in an elastic half space[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2013, 49(6): 52—63.
- [4] 韩铮, 赵成刚. 半球形沉积谷场地对入射平面 Rayleigh 波的三维散射解析解[J]. **岩土力学**, 2007, 28(12): 2607—2613.
- HAN Zheng, ZHAO Cheng-gang. Analytical solution of three-dimensional scattering and diffraction of plane Rayleigh-waves by a hemispherical alluvial valley with saturated soil deposit[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(12): 2607—2613.
- [5] 丁海平, 于彦彦, 郑志法. P 波斜入射陡坎地形对地面运动的影响[J]. **岩土力学**, 2017, 38(6): 1716—1724.
- DING Hai-ping, DING Yan-yan, ZHENG Zhi-fa. Effects of scarp topography on seismic ground motion under inclined P waves[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(6): 1716—1724.
- [6] 范留明. 非均匀层状介质一维波动方程精确解的有限差分算法[J]. **岩土力学**, 2013, 34(9): 2715—2720.
- FAN Liu-ming. A new kind of finite difference scheme for exact solutions of one-dimensional wave equation in heterogeneous layer media[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(9): 2715—2720.
- [7] MORENCY C, LUO Y, TROMP J. Spectral-element simulations of wave propagation in porous media[J]. **Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**, 2010, 175(1): 301—345.
- [8] 刘中宪, 武凤娇, 王冬, 等. 弹性半空间夹杂群对平面 SH 波散射的快速多极多域边界元法模拟[J]. **岩土力学**, 2017, 38(4): 1154—1163.
- LIU Zhong-xian, WU Feng-jiao, WANG Dong, et al. Multi-domain FMM-IBEM simulation of plane SH wave scattering by inclusions in elastic half-space[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(4): 1154—1163.
- [9] 赵成刚, 杜修力, 李小军. 用三维半解析边界元的子结构法分析凸起山包对地震波的散射[J]. **中国地震**, 1993, 9(2): 154—162.
- ZHAO Cheng-gang, DU Xiu-li, LI Xiao-jun. Substructure method of semi-analysis boundary element and application to seismic scattering by three-dimensional topography of a hill[J]. **Earthquake Research in China**, 1993, 9(2): 154—162.
- [10] KAWASE H, KEIITI A K. A study on the response of a soft basin for incident P, S, Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City[J]. **Bulletin of Seismological Society of America**, 1989, 79(5): 1361—1382.
- [11] GUARINZAPATA N, GOMEZ J, JARAMILLO J. Seismic wave scattering through a compressed hybrid BEM/FEM method[J]. **Physics**, 2014(5): 1—19.
- [12] KUPRADZE V D, ALEKSIDZE M A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems[J]. **Computational Mathematics and Mathematical Physics**, 1964, 4(4): 82—126.
- [13] CHEN J T, LEE Y T, YU S R, et al. Equivalence between the Trefftz method and the method of fundamental solution for the annular Green's function using the addition theorem and image concept[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2009, 33(5): 678—688.
- [14] WONG H L. Effect of surface topography on the diffraction of P, SV, and Rayleigh waves[J]. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 1982, 72(4): 1167—1183.
- [15] 梁建文, 胡淞淋, 刘中宪, 等. 平面 SV 波入射下弹性半空间中三维球形洞室的动力响应[J]. **岩土工程学报**, 2016, 38(9): 1559—1568.
- LIANG Jian-wen, HU Song-lin, LIU Zhong-xian, et al. Dynamic response of 3D spherical cavity in elastic half-space under plane SV waves[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(9): 1559—1568.
- [16] LAMB H. On the Propagation of tremors over the surface of an elastic solid[J]. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, 1904, 203(359—371): 1—42.
- [17] MOON F C, PAO Y H. The influence of the curvature of spherical waves on dynamic stress concentration[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1967, 34(2): 373—379.
- [18] KANAUN S, LEVIN V. Scattering of elastic waves on a heterogeneous inclusion of arbitrary shape: an efficient numerical method for 3D-problems[J]. **Wave Motion**, 2013, 50(4): 687—707.